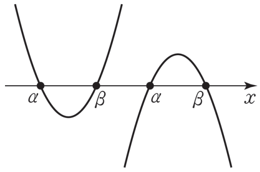
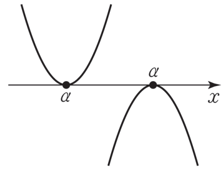
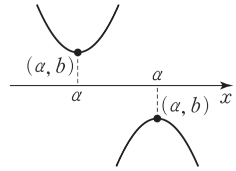
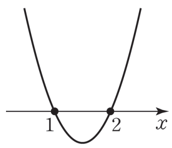
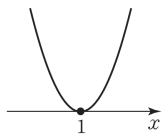
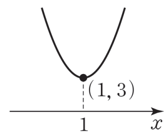
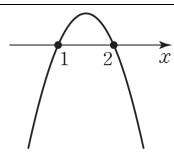
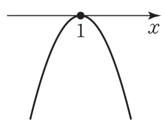
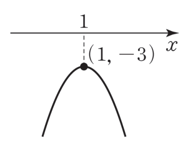
이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계

그래프의 개형			
x축과의 위치	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다.(접한다.)	만나지 않는다.
근의 종류	서로 다른 두 실근	이중근인 한 실근	서로 다른 두 허근
함수식	$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$	$y=a(x-\alpha)^2$	$y=a(x-\alpha)^2+b\,(ab>0)$
방정식	$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$	$a(x-\alpha)^2=0$	$a(x-\alpha)^2+b=0\,(ab>0)$
방정식의 근	$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$	$x=\alpha$	(실근이) 존재하지 않는다.
식의 형태	인수분해 꼴	완전제곱식 꼴	절대부등식 꼴
판별식 D	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$

❶ 최고차항의 계수가 양수일 때

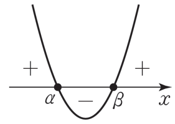
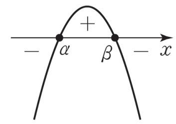
그래프의 개형			
근의 종류	서로 다른 두 실근	이중근인 한 실근	서로 다른 두 허근
함수식	$y=(x-1)(x-2)$	$y=(x-1)^2$	$y=(x-1)^2+3$
방정식	$(x-1)(x-2)=0$ ➡ $x^2-3x+2=0$	$(x-1)^2=0$ ➡ $x^2-2x+1=0$	$(x-1)^2+3=0$ ➡ $x^2-2x+4=0$
방정식의 근	$x=1$ 또는 $x=2$	$x=1$	(실근이) 존재하지 않는다.
식의 형태	인수분해 꼴	완전제곱식 꼴	절대부등식 꼴
판별식 D	$(-3)^2-4\cdot1\cdot2>0$	$(-2)^2-4\cdot1\cdot1=0$	$(-2)^2-4\cdot1\cdot4<0$

❷ 최고차항의 계수가 음수일 때

그래프의 개형			
근의 종류	서로 다른 두 실근	이중근인 한 실근	서로 다른 두 허근
함수식	$y=-(x-1)(x-2)$	$y=-(x-1)^2$	$y=-(x-1)^2-3$
방정식	$-(x-1)(x-2)=0$ ➡ $-x^2+3x-2=0$	$-(x-1)^2=0$ ➡ $-x^2+2x-1=0$	$-(x-1)^2-3=0$ ➡ $-x^2+2x-4=0$
방정식의 근	$x=1$ 또는 $x=2$	$x=1$	(실근이) 존재하지 않는다.
식의 형태	인수분해 꼴	완전제곱식 꼴	절대부등식 꼴
판별식 D	$3^2-4\cdot(-1)\cdot(-2)>0$	$2^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=0$	$2^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)<0$

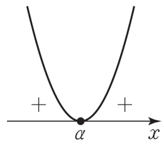
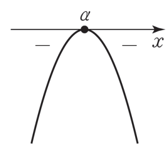
이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$D>0$ ➡ 인수분해 꼴 ➡ 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

그래프의 개형		
함수식	$y=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a>0,\ \alpha<\beta)$	$y=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a<0,\ \alpha<\beta)$
$a(x-\alpha)(x-\beta)>0$의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$\alpha<x<\beta$
$a(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$의 해	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	$\alpha\leq x\leq\beta$
$a(x-\alpha)(x-\beta)<0$의 해	$\alpha<x<\beta$	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
$a(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$의 해	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$

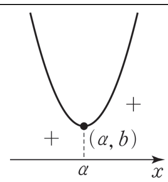
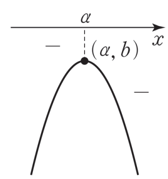
이차방정식이 이중근인 한 실근을 갖는 경우

$D=0$ ➡ 완전제곱식 꼴 ➡ 그래프가 x축과 한 점에서 만난다.(접한다.)

그래프의 개형		
함수식	$y=a(x-\alpha)^2\ (a>0)$	$y=a(x-\alpha)^2\ (a<0)$
$a(x-\alpha)^2>0$의 해	$x\neq\alpha$인 모든 실수	(실수)해는 없다.
$a(x-\alpha)^2\geq 0$의 해	모든 실수 ❶	$x=\alpha$
$a(x-\alpha)^2<0$의 해	(실수)해는 없다.	$x\neq\alpha$인 모든 실수
$a(x-\alpha)^2\leq 0$의 해	$x=\alpha$	모든 실수 ❷

이차방정식이 서로 다른 두 허근을 갖는 경우

$D<0$ ➡ 절대부등식 꼴 ➡ 그래프가 x축과 만나지 않는다.(x축보다 위쪽 또는 아래쪽에 있다.)

그래프의 개형		
함수식	$y=a(x-\alpha)^2+b\ (a>0,\ b>0)$	$y=a(x-\alpha)^2+b\ (a<0,\ b<0)$
$a(x-\alpha)^2+b>0$의 해	모든 실수 ❸	(실수)해는 없다.
$a(x-\alpha)^2+b\geq 0$의 해	모든 실수 ❶	(실수)해는 없다.
$a(x-\alpha)^2+b<0$의 해	(실수)해는 없다.	모든 실수 ❹
$a(x-\alpha)^2+b\leq 0$의 해	(실수)해는 없다.	모든 실수 ❷

❶ 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$이 항상 성립한다. ➡ $D\leq 0,\ a>0$

❷ 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq 0$이 항상 성립한다. ➡ $D\leq 0,\ a<0$

❸ 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립한다. ➡ $D<0,\ a>0$

❹ 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 항상 성립한다. ➡ $D<0,\ a<0$